

ZESTAW WYBRANYCH WZORÓW MATEMATYCZNYCH DLA ARKUSZA PODSTAWOWEGO I ROZSZERZONEGO

Ciągi

Ciąg arytmetyczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n - 1)r] \cdot n}{2}$$

Własności ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \text{ dla } 0 < k < n \text{ i } n \geq 2$$

Monotoniczność:

ciąg jest rosnący, gdy $r > 0$;

ciąg jest malejący, gdy $r < 0$;

ciąg jest stały, gdy $r = 0$.

Ciąg geometryczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ dla } n \geq 2$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = \begin{cases} n \cdot a, & \text{gd } y = 1 \\ a_1 \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, & \text{gd } y \neq 1 \end{cases}$$

Własności ciągu geometrycznego

$$|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} = \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}}, \text{ dla } 0 < k < n \text{ i } n \geq 2$$

Monotoniczność:

ciąg jest rosnący, gdy $(q > 1 \text{ i } a_1 > 0)$ lub $(q \in (0; 1) \text{ i } a_1 < 0)$

ciąg jest malejący, gdy $(q > 1 \text{ i } a_1 < 0)$ lub $(q \in (0; 1) \text{ i } a_1 > 0)$

ciąg jest stały, gdy $q = 1$ lub $a_1 = 0$

Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy k złożymy w banku na n lat, a oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali roku, to kapitał końcowy k_n można obliczyć za pomocą wzoru:

$$k_n = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Trygonometria

Funkcje trygonometryczne

Funkcja zmiennej rzeczywistej	D_f	\mathcal{D}_f	Okres podstawowy
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}	$\langle -1; 1 \rangle$	2π
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}	$\langle -1; 1 \rangle$	2π
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C} \right\}$	\mathbb{R}	π
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{ x: x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{C} \}$	\mathbb{R}	π

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (jedynka trygonometryczna)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \text{ gdy } \cos \alpha \neq 0 \text{ i } \sin \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ gdy } \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \text{ gdy } \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \alpha \neq 0$$

Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

Tabela znaków funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych miar kąta

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istn.
$\operatorname{ctg} x$	nie istn.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Geometria analityczna

Odcinek

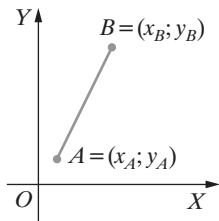
Długość odcinka o końcach w punktach

$A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



Prosta

Równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$,

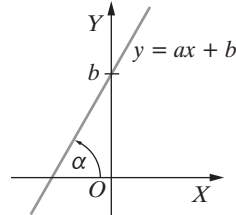
gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi OY , to

ma ona równanie kierunkowe: $y = ax + b$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta przechodząca przez dwa dane punkty $A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B)$

jest wyrażona równaniem: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$.

Prosta i punkt

Odległość punktu $P = (x_0; y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ dana jest wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para prostych

Dwie proste, o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$,

– są prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$.

Jeżeli proste dane są równaniami w postaci ogólnej:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to odpowiednio:

– są równoległe, gdy $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$,

– są prostopadłe, gdy $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku w punkcie $(a; b)$ i promieniu r :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ lub $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$,

gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2 > 0$.

Rachunek wektorowy

Jeśli $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ oraz $k \in \mathbb{R}$, to

$$\vec{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] = [x, y], k \cdot \vec{AB} = [kx, ky]$$

Jeśli $\vec{AB} = [a, b], \vec{CD} = [c, d]$,

$$\text{to } \vec{AB} + \vec{CD} = [a + c, b + d], \vec{AB} - \vec{CD} = [a - c, b - d]$$

Planimetria

Pola i obwody wybranych figur płaskich

Oznaczenia: P – pole powierzchni, $Obw.$ – obwód, $p = \frac{1}{2} Obw.$

Trójkąt:

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

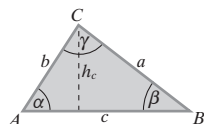
$$P = \frac{1}{2} b \cdot c \sin \alpha$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$P = r p$ (r – promień okręgu wpisanego w trójkąt)

$P = \frac{abc}{4R}$ (R – promień okręgu opisanego na trójkącie)

$$Obw. = a + b + c$$



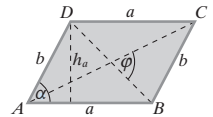
Równoległobok:

$$P = a \cdot h_a$$

$$P = ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} \sin \varphi$$

$$Obw. = 2a + 2b$$

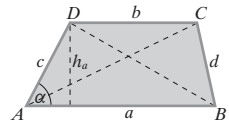


Trapez:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h_a$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot c \sin \alpha$$

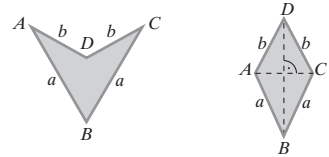
$$Obw. = a + b + c + d$$



Deltoid:

$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

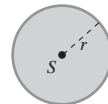
$$Obw. = 2a + 2b$$



Koło:

$$P = \pi r^2$$

$$Obw. = 2\pi r \text{ (długość okręgu)}$$

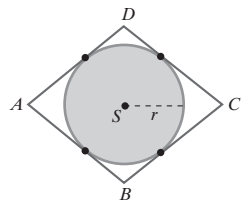


Twierdzenie o wykonalności

Dla okręgu wpisanego w czworokąt (wielokąt):

$$|AD| + |BC| = |AB| + |DC|$$

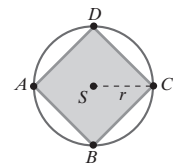
(sumy długości przeciwległych boków są równe).



Dla okręgu opisanego na czworokącie (wielokącie):

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D \text{ (} = 180^\circ \text{)}$$

(sumy miar przeciwległych kątów są równe).



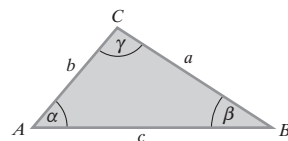
Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

Dany jest trójkąt:

a) **Twierdzenie sinusów (Snelliusa):**

Stosunek długości boków do sinusów kątów przeciwległych jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

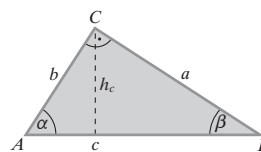


b) **Twierdzenie cosinusów (Carnota):**

Kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych bo-

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

Twierdzenie Pitagorasa



Suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Stereometria

Oznaczenia

P – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

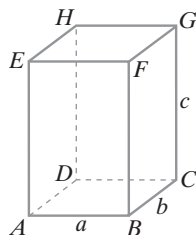
V – objętość

Prostopadłościan

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc,$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu.

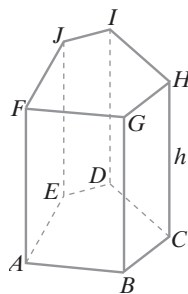


Gnaniastosłup prosty

$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h,$$

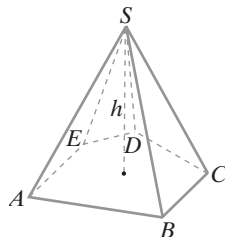
gdzie $2p$ jest obwodem podstawy gnaniastosłupa.



Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h,$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



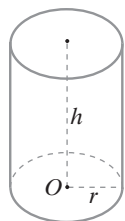
Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P = 2\pi r (r + h)$$

$$V = \pi r^2 h,$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością walca.



Stożek

$$P_b = \pi r l$$

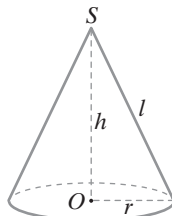
$$P = \pi r (r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

gdzie r jest promieniem podstawy,

h – wysokością,

l – długością tworzącej stożka.

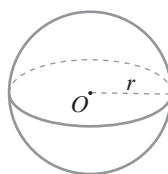


Kula

$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

gdzie r jest promieniem kuli.



Rachunek algebraiczny

Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

W szczególności: $|x| \geq 0$, $|-x| = |x|$.

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Pierwiastkiem arytmetycznym n -tego stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę b taką, że $b^n = a$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę b taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$\text{dla } a \neq 0: a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ oraz } a^0 = 1,$$

$$\text{dla } a \geq 0: a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ dla } a > 0: a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0, b \neq 0$.

Wzory skróconego mnożenia

Z dwumianu Newtona dla $n = 2$ oraz $n = 3$ otrzymujemy dla dowolnych liczb a, b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Logarytmy

Prawa działań na logarytmach

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2, \text{ gdy } b_1, b_2 \in \mathbf{R}_+, a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2, \text{ gdy } b_1, b_2 \in \mathbf{R}_+, a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b, \text{ gdy } b \in \mathbf{R}_+, a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, m \in \mathbf{R}$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \text{ gdy } b \in \mathbf{R}_+, a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ gdy } b \in \mathbf{R}_+, a, c \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ gdy } a, b \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$$

Kombinatoryka

Permutacje

Liczba sposobów, w jaki $n \geq 1$ elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1 \leq k \leq n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k .

Kombinacje

Liczba sposobów, w jaki spośród n elementów można wybrać

$$k$$
 ($0 \leq k \leq n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

Rachunek prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli zajście każdego zdarzenia elementarnego jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A , zaś $|\Omega|$ liczbę elementów zbioru Ω .

Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$, Ω - zdarzenie pewne

$P(\emptyset) = 0$, \emptyset - zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A) \leq P(B)$, gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń

$A, B \subset \Omega$, zatem $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są niezależne, gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami, przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Statystyka

Elementy statystyki opisowej

Średnia arytmetyczna zwykła n liczb: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

gdzie x_i - to i -ta obserwacja, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, n - liczba obserwacji.

Funkcje

Funkcja i jej własności

Funkcja rosnąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Funkcja malejąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Funkcja nierosnąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Funkcja niemalejąca: $\bigwedge_{x_1, x_2 \in D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Funkcja ograniczona: $\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in D_f} |f(x)| \leq M$

Funkcja parzysta: $\bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)]$

Funkcja nieparzysta: $\bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)]$

Funkcja kwadratowa

a) Funkcja kwadratowa (inaczej: trójmian kwadratowy) jest to funkcja postaci $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Uwaga: Gdyby $a = 0$, to funkcja byłaby liniowa: $y = bx + c$.

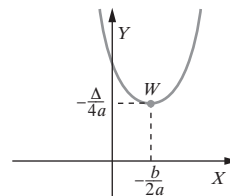
b) Wyróżnik trójmianu kwadratowego to liczba $\Delta = b^2 - 4ac$.

c) Dziedzina i zbiór wartości funkcji kwadratowej:

$$D_f = \mathbb{R}$$

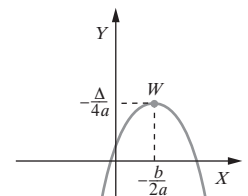
$$Y_w = \begin{cases} \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right) & \text{dla } a > 0 \\ \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right] & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

d) Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola:



dla $a > 0$
(ramiona ku górze)

lub



dla $a < 0$
(ramiona w dół)

	Istnienie miejsc zerowych	Liczba miejsc zerowych
$\Delta > 0$	Istnieją.	Dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta = 0$		Jedno miejsce zerowe $x_1 = x_2 \stackrel{ozn.}{=} x_0$ $x_0 = -\frac{b}{2a} (= p)$
$\Delta < 0$	Nie istnieją.	Żadnych miejsc zerowych

Wzory Viète'a

Założenie: $\Delta \geq 0$ (istnieją miejsca zerowe)

Wówczas:

$$\text{suma: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ iloczyn: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$